Sur les opérateurs de classe $\mathscr{C}_\varrho$

Par GH. ECKSTEIN à Timişoara (Roumanie)

1. Soit $\mathfrak{H}$ un espace de Hilbert, T un opérateur borné dans $\mathfrak{H}$. Rappelons (voir [1]) que T est de classe $\mathscr{C}_\varrho$ ($\varrho > 0$) s'il existe un espace de Hilbert $\mathfrak{K} \supset \mathfrak{H}$ et un opérateur unitaire U dans $\mathfrak{K}$, tel qu'on a

$$T^n P = \varrho P U^n P \quad \text{pour} \quad n \in N = \{1, 2, \ldots\},$$

où P est le projecteur orthogonal de $\mathfrak{K}$ sur $\mathfrak{H}$. L'opérateur U est appelé *ϱ-dilatation unitaire* de T. On a évidemment $\|T^n\| \leqq \varrho$, donc le spectre de T est situé dans le disque $\{\lambda : |\lambda| \leqq 1\}$.

On sait que la classe $\mathscr{C}_1$ est celle des contractions (SZ.-NAGY) et la classe $\mathscr{C}_2$ est celle des opérateurs T dont le rayon numérique $w(T)$ est $\leqq 1$ (BERGER). De plus on sait que si $\varrho_1 > \varrho_2$, on a $\mathscr{C}_{\varrho_1} \supset \mathscr{C}_{\varrho_2}$.

Dans [2], B. SZ.-NAGY et C. FOIAŞ ont prouvé que les opérateurs de classe $\mathscr{C}_\varrho$ sont similaires à des contractions. Dans [4], CH. DAVIS et C. FOIAŞ ont trouvé une autre classe d'opérateurs similaires à des contractions. En étudiant ces deux classes, CH. DAVIS a conjecturé (communication orale, Congrès de Nice) le suivant

Théorème. *Pour tout opérateur T de classe $\mathscr{C}_\varrho$, la suite $\|T^n h\|$ ($n = 1, 2, \ldots$) est convergente pour chaque $h \in \mathfrak{H}$.*

Pour la classe $\mathscr{C}_1$ la propriété est évidente car la suite $\|T^n h\|$ est décriossante; pour les opérateurs T avec $w(T) \leqq 1$, elle a été établie d'une manière directe par CRABB [6].

Dans la présente Note on prouve ce théorème à l'aide d'une construction qui réduit le problème au cas des translations pondérées.

2. Soit S une contraction et V une dilatation unitaire de S. On a:

$$\text{(1)} \quad \|S^* h - \bar{v} h\|^2 = \|P(V^* - \bar{v} I) h\|^2 \leqq \|Vh - vh\|^2 \leqq$$

$$\leqq 2\|Vh - Sh\|^2 + 2\|Sh - vh\|^2 = 2(\|h\|^2 - \|Sh\|^2) + 2\|Sh - vh\|^2.$$

Soit T de classe $\mathscr{C}_\varrho$, où $\varrho>2$ (ce qui n'est pas une restriction, $\mathscr{C}_\varrho$ étant une fonction croissante de ϱ). On sait que si μ vérifie

$$1<|\mu|<\frac{\varrho-1}{\varrho-2},$$

l'opérateur $R_\mu=(|\mu|-1)(\mu I-T)^{-1}$ est une contraction (cf. [1], Ch. I. 11, remarque 3). Soit λ avec $|\lambda|=1$, et soit $1<r<\dfrac{\varrho-1}{\varrho-2}$. Posons $\mu=r\lambda$. On a:

$$\lambda(\mu I-T)(R_\mu-\bar\lambda I)=\lambda(r\lambda I-T)[(r-1)(r\lambda I-T)^{-1}-\bar\lambda I]=\lambda(\bar\lambda T-I)=T-\lambda I. \tag{2}$$

Il en résulte, en passant aux adjoints,

$$\|(T^*-\bar\lambda I)h\|^2=\|\bar\lambda(\bar\mu I-T^*)(R_\mu^*-\lambda I)h\|^2\leqq(r+\varrho)^2\|R^*h-\lambda h\|^2. \tag{3}$$

En utilisant (1) pour $S=R_\mu$, on obtient

$$\|(T^*-\bar\lambda I)h\|^2\leqq 2(r+\varrho)^2[\|h\|^2-\|R_\mu h\|^2+\|R_\mu h-\bar\lambda h\|^2]. \tag{4}$$

Supposons maintenant que $\lambda\in\sigma(T)$ et que $\{h_n\}$ est une suite borné dans $\mathfrak{H}$ telle qu'on ait $\|Th_n-\lambda h_n\|\to 0$. La relation (2) implique

$$R_\mu h_n-\bar\lambda h_n=\bar\lambda(\mu I-T)^{-1}(Th_n-\lambda h_n),$$

donc $\|R_\mu h_n-\bar\lambda h_n\|^2\to 0$, et par (4) il en résulte $T^*h_n-\bar\lambda h_n\to 0$. On a donc démontré le suivant

Lemme. *Si $T\in\mathscr{C}_\varrho$ et si $\{h_n\}$ est une suite bornée dans $\mathfrak{H}$ telle que $Th_n-\lambda h_n\to 0$ pour un certain λ avec $|\lambda|=1$, on a aussi $T^*h_n-\bar\lambda h_n\to 0$.*

3. Soient $T\in\mathscr{C}_\varrho(\mathfrak{H})$, U une ϱ-dilatation unitaire de T dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{K}$ et $\{m_i\}_{i\in N}$ une suite arbitraire de nombres naturels. Soient

$$\hat{\mathfrak{H}}=\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathfrak{H}_i \text{ et } \hat{\mathfrak{K}}=\bigoplus_{i=-\infty}^{\infty}\mathfrak{K}_i \quad \text{où} \quad \mathfrak{H}_i=\mathfrak{H} \text{ et } \mathfrak{K}_i=\mathfrak{K}.$$

On peut identifier les éléments

$$\hat h=(\overset{(1)}{h_1},\overset{(2)}{h_2},\dots,\overset{(i)}{h_i},\dots)\in\hat{\mathfrak{H}} \quad \text{et} \quad (\dots,\overset{(-i)}{0},\dots,\overset{(0)}{0},\overset{(1)}{h_1},\overset{(2)}{h_1},\dots)\in\hat{\mathfrak{K}}.$$

Soient

$$\hat T(\overset{(1)}{h_1},\overset{(2)}{h_2},\dots,\overset{(i)}{h_i},\dots)=(\overset{(1)}{0},\overset{(2)}{T^{m_1}h_1},\overset{(3)}{T^{m_2}h_2},\dots,\overset{(i+1)}{T^{m_i}h_i},\dots),$$

$$\hat U(\dots,\overset{(-i)}{k_{-i}},\dots,\overset{(0)}{k_0},\overset{(1)}{k_1},\dots,\overset{(i)}{k_i},\dots)=(\dots,\overset{(-i+1)}{k_{-i}},\dots,\overset{(1)}{k_0},\overset{(2)}{U^{m_1}k_1},\dots,\overset{(i+1)}{U^{m_i}k_i},\dots),$$

et $\hat{P}$ le projecteur de $\hat{\mathfrak{K}}$ sur $\hat{\mathfrak{H}}$. $\hat{U}$ est évidemment un opérateur unitaire dans $\hat{\mathfrak{K}}$ et on vérifie directement que

$$\varrho \hat{P}\hat{U}^n \hat{h} = \hat{T}^n \hat{h} \quad \text{pour tous } \hat{h} \in \hat{\mathfrak{H}} \text{ et } n \in N,$$

donc $\hat{T}$ est un opérateur de classe $\mathscr{C}_\varrho$.

Soit maintenant $h_1 \in \mathfrak{H}$ tel que $\|T^n h_1\| \not\to 0$. Posons

$$\hat{f}_1 = (\overset{(1)}{h_1}, \overset{(2)}{0}, \ldots, \overset{(i)}{0}, \ldots), \quad \hat{f}_i = \hat{T}^{i-1}\hat{f}_1 \quad \text{et} \quad \hat{e}_i = \hat{f}_i \|\hat{f}_i\|^{-1} \quad (i \in N).$$

Evidemment

$$\hat{f}_i = (\overset{(0)}{0}, \ldots, \overset{(i-1)}{0}, \overset{(i)}{T^{m_1+m_2+\cdots+m_{i-1}} h_1}, \overset{(i+1)}{0}, \ldots).$$

Soit $\hat{\mathfrak{H}}_0$ le sous-espace de $\hat{\mathfrak{H}}$ engendré par les $\hat{f}_i$ $(i \in N)$. $\hat{\mathfrak{H}}_0$ est évidemment invariant pour $\hat{T}$, donc la restriction $T_0 = \hat{T}|_{\hat{\mathfrak{H}}_0}$ est de classe $\mathscr{C}_\varrho$ (car $\hat{U}$ est une ϱ-dilatation unitaire de T_0).

Remarquons que $\{\hat{e}_i\}_{i \in N}$ est une base orthonormale de $\hat{\mathfrak{H}}_0$ et que T_0 est la *translation pondérée* (voir [5])

$$\hat{e}_i \mapsto p_i \hat{e}_{i+1} \tag{5}$$

où

$$p_i = \frac{\|\hat{f}_{i+1}\|}{\|\hat{f}_i\|} = \frac{\|T^{m_1+m_2+\cdots+m_i} h_1\|}{\|T^{m_1+m_2+\cdots+m_{i-1}} h_1\|}. \tag{6}$$

T_0^* est évidemment l'opérateur

$$\hat{e}_i \mapsto 0, \ \hat{e}_{i+1} \mapsto p_i \hat{e}_i \qquad (i \in N).$$

4. Les préparatifs étant terminés, on passe à la démonstration du théorème. Supposons que pour un certain $h_1 \in \mathfrak{H}$ la suite $\{\|T^n h_1\|\}$ ne soit pas convegente. Soit $a = \inf \|T^n h_1\|$. Si $a = 0$, on peut trouver une suite croissante $\{n_i\}$ de nombres naturels, telle qu'on a $\|T^{n_i} h_1\| \to 0$, mais alors, comme

$$\|T^{n_i+p} h_1\| \leqq \|T^p\| \cdot \|T^{n_i} h_1\| \leqq \varrho \|T^{n_i} h_1\|,$$

on a $\|T^n h_1\| \to 0$, en contradiction avec notre hypothèse. On a donc

$$\inf \|T^n h_1\| = a > 0. \tag{7}$$

La suite $\{\|T^n h_1\|\}$ n'étant pas convergente, on peut trouver $\varepsilon > 0$ et une suite croissante $\{n_i\}$ de nombres naturels, telle qu'on ait $|\|T^{n_i} h_1\| - \|T^{n_{i-1}} h_1\|| \geqq \varepsilon$ (où $n_0 = 0$), d'où on déduit

$$\left| \frac{\|T^{n_i} h_1\|}{\|T^{n_{i-1}} h_1\|} - 1 \right| \geqq \frac{\varepsilon}{\varrho \cdot \|h_1\|} = \varepsilon_1 > 0. \tag{8}$$

Posons $m_i = n_i - n_{i-1}$ $(i \in N)$, et avec h_1 et la suite $\{m_i\}$ construisons l'opérateur

T_0 dans $\mathfrak{H}_0$ (cf. le n° précédent). Nous obtenons ainsi la translation pondérée de classe $\mathscr{C}_\varrho$

$$\hat{e}_i \mapsto p_i \hat{e}_{i+1}$$

dont les poids sont

$$p_i = \frac{\|T^{m_1+\dots+m_i} h_1\|}{\|T^{m_1+\dots+m_{i-1}} h_1\|} = \frac{\|T^{n_i} h_1\|}{\|T^{n_{i-1}} h_1\|}.$$

Par (8), nous avons

$$|p-1| \geqq \varepsilon_1 > 0 \quad i \in N, \tag{9}$$

et à l'aide de (7),

$$\varrho \geqq p_1 p_2 \dots p_i = \frac{\|T^{n_i} h_1\|}{\|h_1\|} \geqq \frac{a}{\|h_1\|}. \tag{10}$$

Soit

$$\hat{k}_i = \frac{\hat{e}_1 + T_0 \hat{e}_1 + \dots + T_0^i \hat{e}_1}{\|\hat{e}_1 + T_0 \hat{e}_1 + \dots + T_0^i \hat{e}_1\|} = \frac{\hat{e}_1 + p_1 \hat{e}_2 + \dots + p_1 p_2 \dots p_i \hat{e}_{i+1}}{\|\hat{e}_1 + p_1 \hat{e}_2 + \dots + p_1 p_2 \dots p_i \hat{e}_{i+1}\|}.$$

Nous avons, à l'aide de la relation (10),

$$\|T_0 \hat{k}_i - \hat{k}_i\|^2 = \frac{\|T_0^{i+1} \hat{e}_1 - \hat{e}_1\|^2}{\|\hat{e}_1\|^2 + \|T_0 \hat{e}_1\|^2 + \dots + \|T_0^i \hat{e}_1\|^2} \leqq \frac{(\varrho+1)^2 \|h_1\|^2}{(i+1) a^2} \to 0.$$

Mais

$$\|T_0^* \hat{k}_i - \hat{k}_i\|^2 = \frac{(p_1^2-1)^2 + p_1^2 (p_2^2-1)^2 + \dots + p_1^2 p_2^2 \dots p_{i-1}^2 (p_i^2-1)^2 + p_1^2 p_2^2 \dots p_i^2}{1 + p_1^2 + \dots + p_1^2 p_2^2 \dots p_i^2},$$

et par (9) et (10)

$$\|T_0^* \hat{k}_i - \hat{k}_i\|^2 \geqq \varepsilon_1^2 \frac{1 + p_1^2 + \dots + p_1^2 p_2^2 \dots p_{i-1}^2}{1 + p_1^2 + \dots + p_1^2 p_2^2 \dots p_i^2} \geqq \varepsilon_1^2 \frac{i \cdot a^2}{\|h_1\|^2 (i+1) \varrho^2} \nrightarrow 0,$$

en contradiction avec le lemme. La démonstration est achevée.

Ouvrages cités

[1] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert* (Budapest, 1967).

[2] ——— Similitude des opérateurs de classe $\mathscr{C}_\varrho$ à des contractions, *C. R. Acad. Sci. Paris,* ser. A, **264** (1967), 1063—1065.

[3] ——— Une relation parmi les vecteurs propres d'un opérateur de l'espace de Hilbert et de l'opérateur adjoint, *Acta Sci. Math.*, **20** (1959), 91—96.

[4] Ch. Davis and C. Foiaş, Operators with bounded characteristic function and their *J*-unitary dilation, *Acta Sci. Math.*, **32** (1971), 127—139.

[5] P. R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book,* Van Nostrand (1967).

[6] M. J. Crabb The powers of an operator of numerical radius one, *Michigan Math. J.*, **18** (1971), 253—256.

UNIVERSITÉ DE TIMIŞOARA

(Reçu le 18. décembre 1971),